§8 曲面的一些例子

回忆 Weingarten 映射：

$$-W(p)=+(dG)_p:\ T_pS \longrightarrow T_{n(p)}S^2 = T_pS$$

$$\begin{array}{ccc} T_pS & \longrightarrow & T_pS \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \{\gamma_p'(t)\}/_{\simeq} & \longrightarrow & \{(G\circ\gamma)_{n(p)}'(t)\}/_{\simeq} \end{array}$$

$\overrightarrow{\gamma(t)}$ 为过 p 点，在 S 上的曲线.

W(p) 在基 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵表达：

$$W(p)\{r_u, r_v\} = \{r_u, r_v\}(\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1})$$

$$(=\{-n_u, -n_v\})$$

基本性质：

(i) $v=\lambda r_u+\mu r_v \in T_pS$. 则

$$k_n(v) = \frac{\langle W(v), v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

证明：$$\frac{\langle W(v), v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle -\lambda n_u - \mu n_v,\ \lambda r_u+\mu r_v\rangle}{\langle \lambda r_u+\mu r_v,\ \lambda r_u+\mu r_v\rangle} = \frac{(\lambda,\mu)\,\mathrm{II}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}}{(\lambda,\mu)\,\mathrm{I}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}}$$

$$= k_n(v)$$

#

(2) $\forall v, w \in T_pS$.

$$\langle W(v), w\rangle = \langle v, W(w)\rangle$$

证明：记 $v = \lambda r_u + \mu r_v$

$w = \xi r_u + \eta r_v$，则有

$$\langle W(v), w\rangle = -\langle \lambda n_u + \mu n_v, \xi r_u + \eta r_v\rangle$$

$$= -(\lambda, \mu)\,\mathrm{II}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda, \mu)\,\mathrm{II}^T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$= -(\xi, \eta)\,\mathrm{II}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$= -\langle \xi n_u + \eta n_v, \lambda r_u + \mu r_v\rangle$$

$$= -\langle \lambda r_u + \mu r_v, \xi n_u + \eta n_v\rangle$$

$$= \langle v, W(w)\rangle.$$

#

所以 W 是内积空间 $(T_pS, \langle,\rangle)$ 上的自伴随变换。
(Self-adjoint)

所以有：两实特征根 $k_1 \le k_2$.

Case II $k_1 = k_2 = k$

此时 $\forall v \in T_pS$, $W(v) = kv$.

$$\Longleftrightarrow \mathrm{II} = k\cdot \mathrm{I}.$$

称点 p 为脐点。直观上讲，在脐点处，曲面沿任何切方向的弯曲程度是一样的.

例子：(1) 平面. $\mathrm{I} = (du)^2 + (dv)^2$, $\mathrm{II} = \underset{k}{0}$

(2) 球面 (半径为a) $\mathrm{I} = a^2((d\theta)^2 + \cos^2\theta(d\varphi)^2)$

$\mathrm{II} = a((d\theta)^2 + \cos^2\theta(d\varphi)^2)$

故 $\mathrm{II} = \frac{1}{a}\mathrm{I}$.

$\frac{1}{a}$: $k \neq 0$

或: $n = \frac{r}{a}$

$\Rightarrow dn = \frac{1}{a}dr$

故 $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{-\langle dr, dn\rangle}{\langle dr, dr\rangle} = -\frac{1}{a}$

命题: 全脐点曲面为平面或球面. 即:

S 上任意点 p 有 $\mathrm{II}(p) = k(p)\,\mathrm{I}(p)$, ($k(p)$ 是 S 的光滑函数)

则 S 必为上述两个例子之一.

证明: Step 1: 假设 k 为常值 k, 则

Case 1: $k = 0$ 即 $\mathrm{II} \equiv 0$. $\Rightarrow dn = 0$

$\mathrm{II} = -\langle dr, dn\rangle$ 即 $n \equiv$ 常值量.

习题：此时 $S \equiv$ 平面.（或其一部分）

Case 2: $k \neq 0$.

断言：$n + kr \equiv$ 常向量.

事实上：记 $\tilde{n} = n + kr$. 则有

$$\langle \tilde{n}_u, r_u \rangle = \langle n_u + kr_u, r_u \rangle = -L + kE = 0$$

$$\langle \tilde{n}_u, r_v \rangle = -M + kF = 0$$

$$\langle \tilde{n}_u, n \rangle = \cancel{\langle \tilde{n}_u, n + kr \rangle}$$
$$= \langle n_u + kr_u, n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{n}_u \perp \{ r_u, r_v, n \} \Rightarrow \tilde{n}_u = 0$$

同理 $\tilde{n}_v = 0$ 故 $\tilde{n} \equiv$ 常向量 $\equiv r_0$

故 $|n|^2 = |kr - r_0|^2 = 1$

$$\Rightarrow \left| r - \frac{r_0}{k} \right|^2 = \frac{1}{k^2}$$ 即 r 是球面.

Step 2: 证 k 必是常值函数.

~~同样记：$\tilde{n} = n + kr$~~. 由 Case 2, 验算到

$$\langle n_u + kr_u, r_u \rangle = \langle n_u + kr_u, r_v \rangle = \langle n_u + kr_u, n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow n_u + kr_u \equiv$$ 常向量.

同理: $n_v + k r_v \equiv$ 常向量

再求一次导(出 k_u, k_v), 得

$$n_{uu} + k_u r_u + k r_{uu} = n_{uv} + k_v r_u + k r_{uv} \equiv 0$$

$$n_{vu} + k_u r_v + k r_{vu} = n_{vv} + k_v r_v + k r_{vv} \equiv 0$$

注意到 $n_{uv} = n_{vu}$; $r_{uv} = r_{vu}$

故两式相减得

$$k_v r_u - k_u r_v \equiv 0$$

但 $\{r_u, r_v\}$ 线性无关 $\Rightarrow k_u = k_v = 0$. 得证

#

Case (II): $k_1 \neq k_2$ 此时令 v_1, v_2 是对应于 k_1, k_2 特征向量

必有 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

「

$$\left.\begin{array}{c} \langle W(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, W(v_2) \rangle \\ \langle W(v_1), v_2 \rangle = k_1 \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \langle v_1, W(v_2) \rangle = k_2 \langle v_1, v_2 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

」

定义（平均曲率）

$$H = \frac{k_1+k_2}{2} = \mathrm{trace}(W) \text{ 称为平均曲率}$$

「回忆：$K = k_1 \cdot k_2 = \det(W)$ 为高斯曲率」

问题：有否除了平面与球面之外特殊的曲面？

答：至少包含：常高斯曲率曲面与常平均曲率曲面.

（即 $K \equiv$ 常值）　（即 $H \equiv$ 常值）.

考虑 $z = f(x,y)$

则
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

由 $W = \mathrm{II} \cdot \mathrm{I}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} \\ H = (1+f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2) f_{yy} \end{cases}$

旋转曲面:

$$r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)) \quad (f>0)$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} (f')^2+(g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \dfrac{f'g''-f''g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{f'g''-f''g'}{\sqrt{[(f')^2+(g')^2]^3}} \\ k_2 = \dfrac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \end{cases}$$

若选 u 为 xz 平面上 $(f(u), g(u))$ 的弧长参数, 则有

$$(f')^2+(g')^2 = 1. \quad [\Rightarrow (f'g''-f''g')g' = -f'']$$

则 $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{II} = \begin{pmatrix} f'g''-f''g' & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix}$

而且 $k_1 = -\dfrac{f''}{g'}$, $k_2 = \dfrac{g'}{f}$

故 $K = -\dfrac{f''}{f}$, $H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g'}{f} - \dfrac{f''}{g'}\right)$

常Gauss曲率旋转曲面.

(1a) $K=c^2>0$. 则

$$f''+c^2f=0$$

$$\Rightarrow \quad f(u)= A\cos cu + B\sin cu$$

故 $g(u) = \pm\int_0^u \sqrt{1-f'(t)^2}\,dt$

$$= \pm\int_0^u \sqrt{1-c^2(-A\sin ct+B\cos ct)^2}\,dt$$

当 $B=0$, $A=\frac{1}{c}$ 时

$$f=\frac{1}{c}\cos cu,\quad g=\pm\frac{1}{c}\sin cu$$

(半径为 $\frac{1}{c}$ 的球面)

(1b) $K=0$: 则 $f''(u)=0$ 则

$$f(u)=Au+b,\quad g(u)=\pm\sqrt{1-A^2}\,u+C,\quad 0\le A\le 1$$

$A=0$ → 圆柱面, $A=1$ → 平面, $0<A<1$ → 圆锥面.

(1C): $K=-c^2<0$ 时

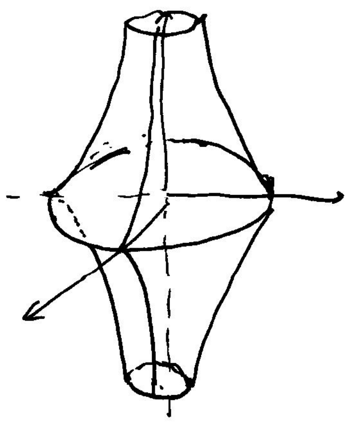
$$f''-c^2f=0$$

$$\Rightarrow f(u)=A\cosh cu+B\sinh cu$$

$$g(u)=\pm\int\sqrt{1-c^2(A\sinh cu+B\cosh cu)^2}\,du$$

特例 $f(u)=\frac{1}{c}e^{-cu}$

$$g(u)=\pm\int_0^u\sqrt{1-e^{-2ct}}\,dt$$



伪球面.

旋转极小曲面.

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f}-\frac{f''}{g'}\right)$$

(2a) $H\equiv 0$

$$\frac{g'}{f}=\frac{f''}{g'}$$

$$\Rightarrow\ f\cdot f''=(g')^2 \ \Rightarrow\ \cancel{\tfrac{1}{2}}(f')^2+f\cdot f''=1$$

$$f\cdot f''=1-(f')^2 \qquad (f')^2+f\cdot f''=(f\cdot f')'$$

$$\Rightarrow\ f\cdot f'=u+A \qquad f\cdot f'=\frac{1}{2}(f^2)'$$

$$\Rightarrow\ f^2=u^2+2Au+B \qquad A,\ B\ \text{常数}$$

取 $f=\sqrt{u^2+2Au+B}$

故 $g=\pm\sqrt{1-(f')^2}$

$$=\pm\sqrt{\frac{B-A^2}{u^2+2Au+B}} \qquad \left(=\pm\sqrt{\frac{(B-A^2)}{(u+A)^2+(B-A^2)}}\right)$$

$$\Rightarrow B-A^2\ \cancel{\geq 0}=a^2>0$$

(i) 简单情形 (令 $\tilde{u}=u+A$) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=f(u)=\sqrt{u^2+a^2} \\ z=g(u)=\pm\displaystyle\int_0^u\frac{a\,dt}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt=\pm a\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{u}{a}\right)\end{cases}$$

直纹面：

$$r(u,v) = a(u) + b(u)\cdot v$$

$a(u)$：空间曲线

$b(u)$：方向

固定 u：$a(u)+v\,b(u)$ 过点 $a(u)$，方向 $b(u)$ 的直线（称为直母线）

$$r_u = a' + b'\cdot v,\quad r_v = b$$

$$r_{uu} = a'' + b''\cdot v,\quad r_{uv} = b',\quad r_{vv} = 0 \Rightarrow N = 0$$

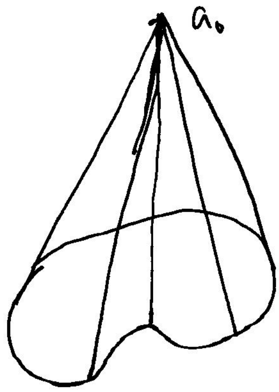
$$\Rightarrow K = \frac{-M^2}{EG-F^2} \le 0$$

$K\equiv 0$ 的直纹面称为可展曲面.

例子：（可展曲面）

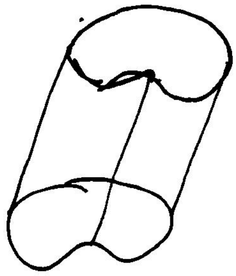
(1) $a_0 + b(u)v$. 即 $a(u)=a_0$ 常向量

锥面？



(2) $\frac{b}{|b|} = b_0$ 常向量

柱面：



(3) 切线面：$a(u) + v a'(u)$

定理：可展曲面只有上述(1).(2).(3)的例子(或它们的拼接组合)

引理：可展面 $\Longleftrightarrow (a', b, b') = 0$

证明：可展面 $\Longleftrightarrow M = 0$

即 $\cancel{\langle b', [(a'+vb')\times b]\rangle}$

$$M = \langle r_{uv}, n \rangle = \frac{\langle r_{uv}, r_u \times r_v \rangle}{|r_u \times r_v|} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \langle r_{uv}, r_u \times r_v \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow (r_{uv}, r_u, r_v) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (b', a' + vb', b) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (b', a', b) = 0 \quad \#$$

定理证明:

Case 1: $b \wedge b' \equiv 0$

$$\Rightarrow \frac{b}{|b|} \equiv \text{const}.$$

此时为柱面

Case 2: $b \wedge b' \neq 0 \quad (\forall u)$

$$\Rightarrow a' = \lambda b + \mu b'$$

令 $\tilde{a} = a - \mu b$

$$\Rightarrow \tilde{a}' = a' - \mu' b - \mu b'$$

$$= (\lambda - \mu') b$$

Case (2a). $\tilde{a}' \equiv 0$. 即 $\tilde{a} \equiv \text{const}$.

则 $a + v b = \tilde{a} + (\mu + v) b$

$$= a_0 + \tilde{v} \cdot b \qquad \text{锥面}.$$

Case (2b). $\tilde{a}' \neq 0 \quad (\forall u)$.

$$a + v b = \tilde{a} + \left(\frac{\mu + v}{\lambda - \mu'}\right) \tilde{a}'. \qquad \text{切线面}.$$

#